المتممات ثابتة للمحاضرة العاشرة

الدوال المستمرة مطلقاً: $AC_{[a,b]}$ -

في هذه المجموعة من الدوال سنبين أنها مجموعة جزئية فعلية من الفضاء الخطي (فضاء الدوال ذ.ت.م) (BV) على الفترة $[a,b]$ أي:

$$AC_{[a,b]} \subsetneqq BV[a,b].$$

وتطبيقاتها واستخداماتها كثيرة.

تعريفها:

لتكن لدينا $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ والمحدودة على $[a,b]$. يقال عن هذه الدالة المحدودة إنها مستمرة مطلقاً أو باصطلاح عليه إذا تحقق إذا كان:

من أجل أي $\varepsilon > 0$ علينا إيجاد:

$$\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;;\; \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \quad ①$$

من أجل أي أسرة /n/ منتهية من الفترات الجزئية $]a_k, b_k[$ من $[a,b]$ $(1 \le k \le n)$. والمنفصلة مثنى مثنى ومجموع أطوالها:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \quad ②$$

ونرمز لهذا النوع من الدوال بالرمز $AC_{[a,b]}$ ونكتب مثلاً:

$$f, g, h, \dots \in AC_{[a,b]}.$$

مثال للحل:

أثبت أن الدالة $h(x) = \sin x$ مستمرة باطلاق على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ بطريقتين مختلفتين وهل تحقق شرط ليبشتز عليها وهل هي ذ.ت.م عليها.

تتمات وإضافات علمية في الفصلين الأول والثاني:

مبرهنة هيللي وعلاقتها بمتتاليات الدوال ونهاياتها:

إذا كانت الدالة $f \in C[a,b]$ وكانت $\{g_n(x)\}$ حيث $n \ge 1$ متتالية من الدوال الحقيقية ذ.ت.م على $[a,b]$ وتغيراتها الكلية محدودة عليها أي أنه يوجد عدد L لا يتعلق بـ n بحيث أن $V(g_n(x)) \le L$ حيث $n \ge 1$ وأضف إلى ذلك أن المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة نقطياً تقارباً بسيطاً من الدالة $g(x)$ على الفترة $[a,b]$ $n \ge 1$ أي $g_n(x) \xrightarrow{p.w} g(x)$ فإنه عندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} (S) \int_a^b f(x)\, dg(x)$

$$= S, \int \lim_{n\to\infty} \dots = \int_a^b f(x)\, dg(x) \quad ③$$

هذه تعتبر شروط كافية للوصول إلى المساواة ③.

مثال:

من أجل ذلك نأخذ الدالة:

$f(x) = \arctan \;\; ; \;\; x \in [0, 1]$.

$g_n(x) = x^n \;\; ; \;\; n \geq 1 \;\; , \;\; x \in [0, 1]$. f

تحقق من صحة العلاقة ② هل متتالية الدوال متقاربة تقاربياً ... التحقق من ① ومن شروط المبرهنة.

تعريف المنحني ذ.ت.م:

مبرهنة جوردان:

يكون المنحني (Γ) قابلاً للإصلاح أو للتقويم على الفترة $[\alpha, \beta]$ والمعرّف وسيطياً بالشكل

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \;\; ; \;\; t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

إذا وفقط إذا كانت كل من الدالتين φ ، ψ بالمتغير t ذ.ت.م على $[\alpha, \beta]$.

مثال:

كل منحني أملس (الدالة مشتقتها مستمرة) ، هو منحني قابل للتقويم (للإصلاح) .

مثال:

ليكن لدينا المنحني (Γ) معطى وسيطياً (المنحني البارامتري) ، بالشكل:

$x = A\cos t \qquad y = B\sin t$

حيث A ، B ثابتان موجبان و $0 \leq t \leq 2\pi$.

بيّن إذا كان هذا المنحني ~~أم لا~~ قابل للتقويم أم لا للإصلاح .

الحل: حسب مبرهنة جوردان نجد:

$x' = \varphi'(t) = -A\sin t \Rightarrow |\varphi'(t)| \leq A$.

$\psi'(t) = \;--\; \Rightarrow |\psi'(t)| \leq B$

هذا يعني أن كلاً من $\varphi(t)$, $\psi(t)$

حيث مشتقاتهما دوال محدودة على الفترة $t \in [0, 2\pi]$

هذا يدل على أن المنحني المفروض ~~[illegible]~~ قابل للتقويم .

من خواص الدالة المستمرة بالإطلاق:

① إذا كانت $f \ni AC[a, b]$ أي مستمرة مطلقاً على $[a, b]$ فإنها ذ.ت.م.

المستمر لا يتعين قابل للاشتقاق أما المطلق نعم .

علوي .

② اذا كانت كل من f , g مستمرتان مطلقاً على $[a,b]$ فإن كل من الدوال αf حيث $\alpha \neq 0$ ثابت $\alpha \in \mathbb{R}$, $|f|$, $\frac{1}{f}$ حيث $f \neq 0$, f^2
بالشكل: $x \in [a,b]$; $g \neq 0$; $\frac{f}{g}$, $f.g$, $f \pm g$
تكون هذه الدوال مستمرة بالإطلاق .

③ كل دالة مثل f مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ يمكننا تصورها على هيئة (بشكل) فرق بين دالتين مستمرتين مطلقاً متزايدتين على هذه الفترة .

مثال للحل: (13):

لتكن الدالة $f = f(u)$ قابلة للتكامل حسب مفهوم ريمان على الفترة $[a,b]$ ولنعرف الدالة

$$G(x) = c + \int_a^x f(u)\, du ; \quad c \text{ ثابت}$$

$$a \leq x \leq b$$

أثبت أن الدالة G مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ باستخدام التعريف (حرفياً) .

< نعود إلى القياس >

2015/12/17 الخميس

العاشرة من المثال

$\overset{*}{\mu} : P(X) \longrightarrow [0, \infty]$ or $(-\infty, \infty]$

$E \longrightarrow \overset{*}{\mu}(E)$.

من الدالة المحققة لما يلي:

1) $\overset{*}{\mu}(\emptyset) = 0$

2) if $E \subseteq F \Rightarrow \overset{*}{\mu}(E) \leq \overset{*}{\mu}(F)$; $E, F \in P(X)$

تسمى بخاصية الاطراد تزايد

3) if $E = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n \Rightarrow \overset{*}{\mu}(E) = \overset{*}{\mu}(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} \overset{*}{\mu}(E_n)$. (3)

من أجل أية متتالية: $\{E_n\}$ في $P(X)$ والمتتاليات ليست بالضرورة منفصلة (مثنى مثنى)

نسمي هذه الخاصية نصف الجمعية المعدودة أو شبه الجمعية المعدودة ولهذا نقول أن $\overset{*}{\mu}$ دالة نصف جمعية معدودة على $P(X)$.

الدالة $\overset{*}{\mu}$ تسمى قياساً خارجياً على $P(X)$ أو على X اختصاراً.

مثال ①:

هذه المجموعة X هي نقاط حجر النرد أي $\emptyset \neq X = \{1, \dots, 6\}$

ولنعرف على $P(X)$ الدالة $\overset{*}{\mu}$:

$\overset{*}{\mu}(E) = \sqrt{|E|}$

حيث $|E|$ عدد عناصر هذه المجموعة.

المطلوب: تحقق فيما إذا كانت الدالة $\overset{*}{\mu}$ قياس خارجي على $P(X)$ وهل تنفع أن تكون قياساً على $P(X)$ مع التعليل.

ملاحظة:

يمكننا التعبير عن ③ في تعريف القياس الخارجي من أجل n ع.ط أيضاً بالأمر من أجل مجموعتين

•) ~~$\sum$~~ $\overset{*}{\mu}(\bigcup_{k\geq 1} E_k) \leq \dots$

④

•) $\overset{*}{\mu}(E_1 \cup E_2) \leq \dots$

مثال:

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن:

$\tau = \{ \emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\} \}$

تبولوجيا حسب التعريف. على X ولكنه ليست جبرًا وبالتالي ليست جبرًا تامًا على X. والمطلوب: اكتب أصغر جبر يحوي τ أي $S(\tau)$. مثلاً:

$S(\tau) = \{ \emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,4\} \}$

فهنا هذا أصغر جبر يحوي τ. وهو جبر تام. سمنا الجبر المنتهي أو الجبر التام المنتهي. وهو تبولوجيا.

ملاحظة:
إذا كانت X المجموعة الأساسية منتهية فإن كل جبر من أجزاء X هو جبر تام.

مثال الحل:
إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$ والمطلوب ما أصغر جبر يحوي لصف τ، $\tau = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$؟

وما أصغر تبولوجيا تحويه.

بعض خواص القياس:
لنفرض لدينا فضاء القياس (X, S, μ) (جبر تام) وحيثما هنا أنه نفرض أن كل المجموعات القادمة قيوسة.

I) إذا كانت $E, F \in S$ ، $E \cap F = \emptyset$ أي منفصلتان فإن:
$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F). \quad (1)$$
أي μ جمعي منته، (هذا احتمال).

II) إذا كانت $F, E \in S$ ، $E \subseteq F$ فإن:
$$\mu(E) \leq \mu(F) \quad (2)$$
أي أن μ متزايد باطراد. على الجبر التام S (هي مع التعريف).

III) من أجل أي صف من المجموعات $E_1, E_2, \ldots \in S$ فإن:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (3)$$
أي μ دالة نصف جمعية عدودة.

I_4) إذا كانت $S \ni E, F$ ، $E \subseteq F$ ، $\mu(E) < \infty$ (كي لا نقع بعدم تعيين) فإن:
$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E). \quad (4)$$

I_5) خاصية الاستمرار من الأعلى ومن الأسفل.

(1 لنفترض أن μ قياساً منتهياً ($\mu(X) < \infty$) على كلاجبر لتام S.
عندئذٍ من أجل أية متتالية متزايدة باطراد: $E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ بحيث أن:

$E_n \in S$ ، $S \ni E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ يكون:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n). \quad (5)$$

ونقول أن μ مستمرة من الأدنى عند E أو إلى E. تسمى خاصة الاستمرارية من الأدنى.

(2 من أجل أية متتالية متناقصة باطراد $\{F_n\}$ بحيث:

$\mu(F_1) < \infty$ ، $F_n \in S$ ، $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F \in S$.

يكون:

$$\mu\left(\bigcap_{1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n) \quad (6)$$

ونقول هنا أن μ قياس مستمر من الأعلى عند F تسمى خاصة الاستمرار من الأعلى.

تعريف المجموعة المقيسة أو μ^*- مقيسة:

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، و μ^* قياساً خارجياً على $P(X)$ أو على X و لتكن $E \in P(X)$.

يُقال إن E تكون مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ^* إذا تحققت المساواة (العلاقة) التالية:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E}) \; ; \quad (1)$$

$\forall A \in P(X)$ أو $A \subseteq X$.

حيث A مجموعة الاختبار. التي من خلالها نختبر أن E مقيسة أو لا.

$\tilde{E}$ متممة E بالنسبة لـ X

نرمز بـ $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ لصف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ μ^* في X أي أن كل عنصر (مجموعة) منه هو مجموعة مقيسة. ونكتب:

$E, F \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$.

ملاحظة:

يكفي للإثبات أن المجموعة E الجزئية من $P(X)$ مقيسة أن تتحقق المتراجحة التالية فقط:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E}) \quad (2)$$

علماً أن المتراجحة المعاكسة لـ (2) محققة دوماً. وعلاوة على ذلك إذا كانت $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $\tilde{E} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ويمكن اثبات ذلك بالاستدلال أو بالتعريف.

مثال للحل:

أثبت أن كلاً من X , $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

خواص المجموعات المقيسة:

خ1) إذا كانت $\mu^*(E)=0$ فإن $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. حيث $E \in P(X)$ ، μ^* قياس خارجي.

للاثبات يكفي أن نلاحظ الاحتوائين: $A \cap E \subseteq E$ ، $A \cap \tilde{E} \subseteq E$

والمتابعة من الكتاب حرفياً.

خ2) إذا كانت $\mu^*(G)=0$ فإن $\mu^*(E \cup G) = \mu^*(E - G) = \mu^*(E)$ (من الكتاب) مع تحقق جميع الشروط.

خ3) إذا كانت $E, F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن كلاً من $E \cup F$, $E \cap F$, $E - F$ ، $E \Delta F$ الفرق التناظري تكون مقيسة. يمكن تعميم هذه الخاصة على أكثر من مجموعة.

مثال للمناقشة:

اثبت أن صف المجموعات المقيسة $\mathcal{M}_{\mu^*}$ جبر تام على X . حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ كما على X

- إذا كان لدينا $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$: $\bigcup_{n \ge 1} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن: $\tilde{E} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

علينا أن نستوفي في هذا الاثبات شروط الجبر التام.

قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ (تعميم لمفهوم الطول): نضع $X = \mathbb{R}$

في هذه الفقرة سنقوم على انشاء قياس جديد هو قياس ليبيغ من أجل مجموعات جزئية من $X = \mathbb{R}$ ومن أكثر القياسات شهرة ولهذا الغرض سنولد قياساً خارجياً على $P(\mathbb{R})$ وهي مجموعة أجزاء المجموعة $\mathbb{R}$ مع الاستفادة من المبرهنات السابقة.

لتكن $E \in P(\mathbb{R})$ أو $E \subseteq \mathbb{R}$. ع. ما. و $\{I_n\}_{n \ge 1}$ أسرة من الفترات

Scanned by CamScanner

وتعتبر المفتوحة من اليسار من القبيل: $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ والتي تشكل
تغطية لـ E (أي أسرة مجموعات $\subseteq E$) أي: $E\in(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} I_n)$
ونرمز بـ $l(I_n)$ لطول الفترة المفتوحة من اليسار
I_n مثلاً: $l(]a,b[) = b-a$ حيث $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$
هناك أسرة موجودة دائماً لدينا الفترات: $\{-n,n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ تشكل تغطية لـ $E\in\mathbb{R}$

ونشكل الدالة λ^* على $P(\mathbb{R})$ بالصورة:

$$\lambda^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty]$$
$$; \quad E \longmapsto \lambda^*(E) = \inf\{\sum_{n\geq 1}^{\infty} l(I_n)\},$$

حيث أخذ الـ inf على كل التغطيات

$$E \in (\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} I_n)$$

والـ inf أخذ هنا بالنسبة لجميع التغطيات لـ E المؤلفة من
الفترات السابقة I_n وإذا كانت $\lambda^*(E)=+\infty$ لا نستبعد من الدراسة.
وفيما يتعلق بالدالة λ^* وخواصها نقول إن λ^* قياس خارجي معرف على
$P(\mathbb{R})$ أو على $\mathbb{R}$ يحقق ما يلي:

(D1 $\lambda^*(E) \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} l(I_n)$ حسب تعريف inf (مباشرة).

كما أنه أعظم الحدود الدنيا.

(D2 $\lambda^*(E) \leq l(I)$ حيث E مجموعة $\subset$ بالفترة I

(D3 إذا كانت E مجموعة محدودة فإن $\lambda^*(E) < \infty$
(D4 $\lambda^*(\emptyset) = 0$
(D5

$$\lambda^*(\{a\}) = 0$$
$$\{a\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

نأخذ:

ملاحظة:
إن λ^* تأخذ من الفترات $]a,b[$, $]a,b]$ ... أي
$\lambda^*(]a,b]) = b-a$ وبالتالي $\lambda^* = \lambda$

نستطيع من $[a,\infty[$ مثلاً.

ملاحظة :

* الدالة λ^* المعرفة سابقاً تعرف قياساً خارجياً وذلك حسب القياس الخارجي مشروطه على $P(\mathbb{R})$ فإنه لا يمكن أن $P(\mathbb{R})$ قياساً على جبر تام على $\mathbb{R}$. (حسب الكتاب).

تعريف: المجموعة المقيسة بالنسبة لـ λ^*: العمل على $\mathbb{R}$ أي $X = \mathbb{R}$

ليكن λ^* قياس خارجي على $P(\mathbb{R})$ تقول عن المجموعة $E \in \mathbb{R}$ إنها مقيسة بالنسبة لـ λ^* اذا تحقق مايلي:

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap \bar{E})$$

حيث $A \in P(\mathbb{R})$.

- نرمز لصف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ λ^* بالرمز: $\mathcal{L} = \mathfrak{M}_{\lambda^*}$.

وهذا الصف عبارة عن جبر تام على $\mathbb{R}$ حسب مثال سابق. كما رأينا:

$$\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}} \quad \leftarrow \text{مقصور}$$

يعرف قياساً على $\mathcal{L}$. ونلاحظ هنا أنه:

$$P_1 = \{]a, b] ; -\infty < a < b < \infty \} \cup \emptyset \subseteq K(P_1) = \beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$$

أي كل مجموعة بوريلية مقيسة لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

- نسمي القياس λ المعرف على الجبر التام $\mathcal{L}$ قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ وكل مجموعة مثل $F \in \mathcal{L}$ تسمى مقيسة حسب مفهوم ليبيغ. وقياس ليبيغ لها هو $\lambda(F)$ أو كما يسمونه قياس ليبيغ وحيد البعد. مثلاً:

(حيث $\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow [0, \infty]$)

$$\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = 0$$

$$\lambda([1, 5]) = \lambda(]1, 5]) = 4$$

اذاً قياس الفترات هو طولها لذا نسمي قياس ليبيغ تعميماً لمفهوم الطول.